

含有 C^* -正规子群的有限群^{*}

何宣丽¹, 李样明², 王燕鸣³

(1. 中山大学数计学院, 广东 广州 510275;

2. 广东教育学院数学系, 广东 广州 510310;

3. 中山大学/岭南学院数计学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 设 G 为有限群, H 是 G 的子群. 称 H 是 G 的 S -拟正规子群, 如果对 G 的任意 Sylow 子群 P , 有 $HP = PH$; 称 H 是 G 的 S -拟正规嵌入子群, 若 H 的 Sylow 子群为 G 的某个 S -拟正规子群的 Sylow 子群; 称 H 是 G 的 C^* -正规子群, 如果 G 有正规子群 K 使得 $G = HK$ 且满足 $H \cap K$ 在 G 中是 S -拟正规嵌入的. 设 d 是 p -群 P 的最小生成元个数. 考虑 P 的 d 个极大子群构成的集合 $M_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ 且使得它们的交是 P 的 Frattini 子群 $\Phi(P)$. 对 $M_d(P)$ 中的群在满足 C^* -正规假设条件下群的结构进行了研究, 并推广了最近的一些结论.

关键词: C^* -正规子群; S -拟正规嵌入子群; p -幂零群

中图分类号: O15 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2009) 05-0012-05

Finite Groups with Some C^* -normal Subgroups

HE Xuanli¹, LI Yangming², WANG Yanming³

(1. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. Department of Mathematics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510310, China;

3. Lingnan College and Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Let G be a finite group and H a subgroup of G . It says that H is an S -quasinormal subgroup of G if $HP = PH$ for any Sylow subgroup P of G ; H is an S -quasinormally embedded subgroup of G if every Sylow subgroup of H is a Sylow subgroup of some S -quasinormal subgroup of G ; H is a C^* -normal subgroup of G if there exists a normal subgroup K of G such that $G = HK$ and $H \cap K$ is S -quasinormally embedded in G . Let d be the smallest generator number of a p -group P . Consider a set $M_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ of maximal subgroups of P such that $\bigcap_{i=1}^d P_i = \Phi(P)$. The aim is to investigate the structure of finite group G under the assumption that all members in $M_d(P)$ are C^* -normal in G , and generalizes some recent results.

Key words: C^* -normal subgroup; S -quasinormally embedded subgroup; p -nilpotent group

本文所考虑之群均为有限群, 所使用的符号均为标准的 (参见文 [1]). G 总表示有限群, $|G|$ 表示 G 的阶, $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子集合, G_p 表示对某个 $p \in \pi(G)$, G 的一个 Sylow p -子群, H_c 表示 H 在 G 中的核, 即包含在 H 中的 G 的最大正规子群.

为方便起见, 用 $M(G)$ 表示 G 的 Sylow 子群的所有极大子群构成的集合. 有限群理论的一个有趣问题是讨论 $M(G)$ 中的群对有限群结构的影响. 此方面研究的典型结果是文 [2] 证明了: 如果 $M(G)$ 中的群在 G 中正规, 那么 G 为超可解群. 此结论已经被广泛地推广^[3-12]. 在文 [13] 中,

* 收稿日期: 2008-11-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871210); 广东省自然科学基金资助项目 (06023728)

作者简介: 何宣丽 (1980 年生), 女, 博士生; E-mail: xuanlihe@163.com

李世荣、何宣丽则从另一新的角度推广上述结论为: 设 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子。则下列结论等价: (a) G 是 p -幂零群; (b) $M_d(G_p)$ 中的群在 G 中正规嵌入; (c) $M_d(G_p)$ 中的群在 G 中 S -拟正规嵌入。最近韦华全等^[3]推广 S -拟正规嵌入及 C -正规概念为 C^* -正规: 称 H 是 G 的 C^* -正规子群, 如果 G 有正规子群 K 使得 $G = HK$ 且满足 $H \cap K$ 在 G 中 S -拟正规嵌入, 并证明了: 设 H 是有限群 G 的正规子群且使得 G/H 为 p -幂零群, P 是 H 的 Sylow p -子群, 其中 $p \in \pi(G)$ 且满足 $(p-1, |G|) = 1$ 。如果 $M(P)$ 中的群在 G 中 C^* -正规, 那么 G 为 p -幂零群。

延用文 [13] 的符号, 我们引入下面定义:

定义 1 [文 [13], 定义 1.1] 设 d 是 p -群 P 的最小生成元个数。考虑 P 的 d 个极大子群构成的集合 $M_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ 且使得它们的交是 P 的 Frattini 子群 $\Phi(P)$ 。

很明显, 对 p -群 P , 满足定义 1 的 $M_d(P)$ 不是唯一的。

本文将继续上述工作, 讨论 $M_d(G_p)$ 中的群在满足 C^* -正规假设条件下群 G 的结构, 推广了文 [3] 及最近的一些结论。

1 基本引理

引理 1 (a) S -拟正规子群是次正规子群。

(b) 如果 $H \leq K \leq G$ 且 H 在 G 中 S -拟正规, 那么 H 在 K 中 S -拟正规。

(c) 如果 H 是 G 的 S -拟正规 Hall 子群, 那么 $H \triangleleft G$ 。

(d) 设 $K \triangleleft G$ 。如果 H 在 G 中 S -拟正规, 那么 HK/K 在 G/K 中 S -拟正规。

(e) 设 P 是 G 的 p -子群, 其中 $p \in \pi(G)$ 。则 P 在 G 中 S -拟正规当且仅当 $N_G(P) \geq O^p(G)$ 。

(f) 设 H 是 G 的幂零子群。则 H 在 G 中 S -拟正规当且仅当 H 的 Sylow 子群在 G 中 S -拟正规。

(g) 如果 H 是 G 的 S -拟正规子群, 那么 H/H_G 幂零。

证明 (a) - (d) 可参看文 [10]; (e), (f) 参看文 [12]; (g) 参看 [11]。

引理 2^[3] 设 H 是 G 的子群。

(a) 如果 H 在 G 中是 C^* -正规的且满足 $H \leq M$ $\leq G$, 那么 H 在 M 中 C^* -正规。

(b) 设 $N \triangleleft G$ 且使得 $N \leq H$ 。则 H 在 G 中 C^* -正规当且仅当 H/N 在 G/N 中 C^* -正规。

(c) 设 π 是一个素数集合, H 是 G 的 π -子

群, 而 N 是 G 的 π' -子群。则 H 在 G 中 C^* -正规当且仅当 HN/N 在 G/N 中 C^* -正规。

下面的引理是 Burnside 定理的一个推论:

引理 3 设 p 是整除 $|G|$ 的一个素因子且满足 $(p-1, |G|) = 1$ 。如果 G 有循环 Sylow p -子群, 那么 G 为 p -幂零群。

引理 4^[1] 设 N 是 G 的正规子群且 $H \leq G$ 。如果 $N \leq \Phi(H)$, 那么 $N \leq \Phi(G)$ 。

引理 5^[14] 设 U, V 是 G 的子群。则下列结论等价:

(a) $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$ 。

(b) $UV \cap UW = U(V \cap W)$ 。

引理 6^[15] 如果 P 是 G 的 Sylow p -子群, N 是 G 的正规子群且使得 $P \cap N \leq \Phi(P)$, 那么 N 是 p -幂零群。

引理 7^[16] 设 p_1, p_s 分别是整除 $|G|$ 的最小素因子及最大素因子。如果 G 包含两个超可解子群 H, K 且满足 $|G:H| = p_1, |G:K| = p_s$, 那么 G 是超可解群。

2 主要结果

定理 1 设 G_p 是 G 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|G|$ 的素因子且满足 $(p-1, |G|) = 1$ 。则 G 是 p -幂零群当且仅当对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规。

证明 假定 G 是 p -幂零群, 那么 G 有一个 Hall 正规 p' -子群, 记为 K 。任取 $P_i \in M_d(G_p)$ 。记 $T = KP_i$ 。则 $|G:T| = |G/K: T/K| = p$ 。因为 G/K 是 p -群, 所以 $T \triangleleft G$ 。故 P_i 在 G 中是正规嵌入的, 当然是 C^* -正规的。

反之, 假定 G 不是 p -幂零群, 并设 G 是一个极小反例。任取 $P_i \in M_d(G_p)$, 由定理假设条件可知, G 存在正规子群 K_i 使得 $G = P_i K_i$ 且有 $P_i \cap K_i$ 在 G 中是 S -拟正规嵌入的。因此存在 G 的 S -拟正规子群 M_i 使得 $P_i \cap K_i$ 是 M_i 的 Sylow p -子群。

(1) $O_{p'}(G) = 1$ 。

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$ 。记 $N = O_{p'}(G)$ 。则 $G_p N/N$ 是 G/N 的 Sylow p -子群, 且同构于 G_p 。因此 $G_p N/N$ 和 G_p 有相同的生成元个数, 即是 d , 且记 $M_d(G_p N/N) = \{P_1 N/N, \dots, P_d N/N\}$ 。由引理 2 可知, $P_i N/N$ 在 G/N 中是 C^* -正规的。 G 的极小性蕴含着 G/N 是 p -幂零群, 从而 G 是 p -幂零群, 矛盾。从而 $O_{p'}(G) = 1$ 。

(2) $\Phi(G_p)_c = 1$ 。

否则, 任取 $L \leq \Phi(G_p)_c$ 且使得 $L \triangleleft G$ 。考虑因子群 G/L 。此时 $P_i/L (i = 1, \dots, d)$ 是 G_p/L 的极大子群。由引理 2 可知, G/L 满足定理假设条件。 G 的选取蕴含着 G/L 是 p -幂零群。应用引理 4 可知, $L \leq \Phi(G)$ 。从而 G 是 p -幂零群, 矛盾。

(3) $G/(M_i)_c$ 是 p -幂零群。

因为 M_i 在 G 中 S -拟正规, 由引理 1 (d) 可推出 $M_i/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中 S -拟正规。再根据引理 1 (f) (g) 可知, $(P_i \cap K_i)(M_i)_c/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中 S -拟正规。易知 $P_i \cap K_i \triangleleft G_p$, 由引理 1 (e) 可知, $(P_i \cap K_i)(M_i)_c/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中正规。因此 $P_i \cap K_i \leq (M_i)_c$ 。由 $G = P_i K_i$ 可知, $G/(M_i)_c = P_i(M_i)_c/(M_i)_c \cdot K_i(M_i)_c/(M_i)_c$ 。我们断言: $P_i(M_i)_c/(M_i)_c \cap K_i(M_i)_c/(M_i)_c = 1$ 。事实上, 因为 $P_i \cap K_i \cap (M_i)_c = P_i \cap (M_i)_c = G_p \cap (M_i)_c$ 及 $O^p(G) \leq K_i$, 所以 $(P_i \cap (M_i)_c)(K_i \cap (M_i)_c) = (M_i)_c = (M_i)_c \cap P_i K_i$ 。由引理 5 可知, $(P_i(M_i)_c) \cap (K_i(M_i)_c) = (P_i \cap K_i)(M_i)_c = (M_i)_c$, 即 $P_i(M_i)_c/(M_i)_c \cap K_i(M_i)_c/(M_i)_c = 1$ 。于是, $|K_i(M_i)_c/(M_i)_c|_p = p$ 。应用引理 3 可得, $K_i(M_i)_c/(M_i)_c$ 是 p -幂零群。因此 $G/(M_i)_c$ 是 p -幂零群。

(4) 得出矛盾。

记 $N = \bigcap_{i=1}^d (M_i)_c$ 。则有 $G_p \cap N = \bigcap_{i=1}^d (G_p \cap (M_i)_c) = \bigcap_{i=1}^d (P_i \cap K_i) = \bigcap_{i=1}^d K_i \cap \Phi(G_p) \leq \Phi(G_p)$ 。应用引理 6 可得, N 是 p -幂零群。由 (1) 可知, N 是 p -群且 $N = N \cap G_p \leq \Phi(G_p)$ 。再由 (2) 可知, $N = 1$ 。因此 G 是 p -幂零群, 矛盾。

故极小反例不存在。从而 G 为 p -幂零群。证毕。

定理 2 设 G 为有限群。则下面结论等价:

(a) G 为 p -幂零群。

(b) G 存在正规子群 H 且使得 G/H 是 p -幂零群, P 是 H 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|H|$ 的素因子且满足 $(p-1, |H|) = 1$, $M(G_p)$ 中的所有群在 G 中 C^* -正规。

(c) G 存在的正规子群 H 且使得 G/H 是 p -幂零群, P 是 H 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|H|$ 的素因子且满足 $(p-1, |H|) = 1$, 对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规。

证明 我们仅需要证明 (c) 暗含着 (a)。

假定 (c) 成立, 但 G 不是 p -幂零群, 设 G 是一个极小反例。明显的, 由定理 1 可知, $H < G$ 。由引理 2 可知, H 是 p -幂零群。因此 H 有正规 p -补, 记为 $H_{p'}$, 且有 $H_{p'} \triangleleft G$ 。考虑因子群 $G/H_{p'}$ 。容易验证 $G/H_{p'}$ 满足定理假设条件, 因此 $G/H_{p'}$ 是 p -幂零群。如果 $H_{p'} \neq 1$, 那么 G 是 p -幂零群, 矛盾。故我们假定 H 是 p -群。由定理假设条件 G/H 是 p -幂零群, 那么 G/H 有正规 p -补, 记为 K/H 。由 Schur-Zassenhaus 定理可知, $K = HK_{p'}$, 其中 $K_{p'}$ 是 K 的 Hall p' -子群。易验证 K 满足定理 2 的假设条件。由 G 的极小性可知, K 是 p -幂零群, 因此 G 是 p -幂零群, 矛盾。

推论 3 ([3], 推论 3.2) 设 P 是 G 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|G|$ 的素因子且满足 $(p-1, |G|) = 1$ 。则 G 是 p -幂零群当且仅当 P 的每个极大子群在 G 中 C^* -正规。

推论 4 ([13], 定理 3.1) 设 G_p 是 G 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子。则下面结论等价:

(a) G 为 p -幂零群。

(b) 对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内所有群在 G 中正规嵌入。

(c) 对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内所有群在 G 中 S -拟正规嵌入。

推论 5 设 G_p 是 G 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|G|$ 的素因子且满足 $(p-1, |G|) = 1$ 。如果对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内每个群在 G 中 C^* -正规, 那么 G 是 p -幂零群。

推论 6 设 G_p 是 G 的 Sylow p -子群, 其中 p 是整除 $|G|$ 的任一素因子。如果对某个固定的 $M_d(G_p)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规, 那么 G 拥有超可解型的 Sylow 塔性质。

定理 7 设 G 为有限群。则下面结论等价:

(a) G 为超可解群。

(b) G 存在正规子群 H 且使得 G/H 是超可解群, P 是 H 的任一 Sylow 子群, 对某个固定的 $M_d(P)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规。

证明 我们仅需要证明 (b) 蕴含着 (a)。

假定 (b) 成立, 但 G 不是超可解群, 设 G 是一个极小反例。

由引理 2 及推论 6 可知, H 拥有超可解型的 Sylow 塔性质。令 q 是整除 $|H|$ 的最大素因子, Q 是 H 的 Sylow q -子群, 那么 $Q \triangleleft G$ 。

(1) G/Q 是超可解群。

任取 H 的 Sylow 子群, 记为 P 。易知 PQ/Q 是

H/Q 的 Sylow 子群。由定理假设, 对某个固定的 $M_d(P) = \{P_1, \dots, P_d\}$ 满足其内每个群在 G 中是 C^* -正规的。由引理 2 可知, $M_d(PQ/Q) = \{P_1Q/Q, \dots, P_dQ/Q\}$ 中的每个群在 P_iQ/Q 在 G/Q 中是 C^* -正规的。因为 $(G/Q)/(H/Q) \cong G/H$ 是超可解的, 所以由 G 的极小性可知, G/Q 是超可解群。

(2) Q 是 G 的 Sylow q -子群。

否则, 假定 $Q < G_q$ 。令 p, r 分别是整除 $|G/Q|$ 的最小素因子及最大素因子。因为 G/Q 是超可解群, 所以 G/Q 包含两个子群 $M_1/Q, M_2/Q$ 且满足 $|G:M_1| = |G/Q:M_1/Q| = p, |G:M_2| = |G/Q:M_2/Q| = r$ 。由引理 2 可知, $(M_i, Q) (i = 1, 2)$ 满足定理假设条件。 G 的极小性蕴含着 M_1, M_2 是超可解的。应用引理 7 可得 G 是超可解群, 矛盾。

(3) 最后矛盾。

由定理假设, 对任一 $Q_i \in M_d(Q) = \{Q_1, \dots, Q_d\}$, 都存在 G 的正规子群 K_i 使得 $G = Q_i K_i$ 且有 $Q_i \cap K_i$ 在 G 中 S -拟正规嵌入。因此存在 G 的 S -拟正规子群 M_i 使得 $Q_i \cap K_i$ 是 M_i 的 Sylow q -子群。由引理 1 (d) 可推出 $M_i/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中 S -拟正规。再由引理 1 (f) (g) 可知, $(Q_i \cap K_i)(M_i)_c/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中 S -拟正规。易知 $Q_i \cap K_i \triangleleft Q$, 由引理 1 (e) 可知, $(Q_i \cap K_i)(M_i)_c/(M_i)_c$ 在 $G/(M_i)_c$ 中正规。因此 $Q_i \cap K_i \leq (M_i)_c, Q_i \cap K_i = (M_i)_c \cap Q \triangleleft G$ 。由 $G = P_i K_i$ 可知, $G/Q_i \cap K_i = (Q_i/Q_i \cap K_i) \cdot (K_i/Q_i \cap K_i)$, $q = |(Q/Q_i \cap K_i) \cap (K_i/Q_i \cap K_i)| = |Q \cap K_i/Q_i \cap K_i|$ 。因为 $G/K_i \cong Q_i/Q_i \cap K_i$ 是超可解的, 所以由 (1) 可知, $G/Q \cap K_i$ 是超可解的。因此 $G/(Q_i \cap K_i)$ 是超可解的。从而 $G/\cap_{i=1}^d (Q_i \cap K_i)$ 是超可解的。令 $T = \cap_{i=1}^d (Q_i \cap K_i)$ 。则 $T = \Phi(Q) \cap (\cap_{i=1}^d K_i) \leq \Phi(Q) \leq \Phi(G)$ 。故 G 是超可解群, 矛盾。

完成证明。

推论 8 设 G' 是 G 的换位子群。如果对 G' 的任一 Sylow 子群 P 满足对某个固定的 $M_d(P)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规, 那么 G' 是幂零群。

推论 9 设 G^u 是 G 的超可解剩余子群。则 G 是超可解群当且仅当对 G^u 的任一 Sylow 子群 P , 满足对某个固定的 $M_d(P)$, 其内所有群在 G 中 C^* -正规。

推论 10 设 G 是有限群。则下面结论等价:

(a) G 是超可解群。

(b) 存在 G 的正规子群 H 且使得 G/H 是超可解群, P 是 H 的任一 Sylow-子群, $M(P)$ 中的所有群在 G 中 C^* -正规。

注记: 推论 10 即是文 [3] 中的定理 4.1 在 $\mathbb{F}$ (包含超可解群类的饱和群系) 取 U (超可解群类) 时的结论。

推论 11 ([13], 定理 3.2) 设 G 为有限群。则下面结论等价:

(a) G 为超可解群。

(b) 存在 G 的正规子群 H 且使得 G/H 是超可解群, P 是 H 的任一 Sylow-子群, 对某个固定的 $M_d(P)$, 其内所有群在 G 中 S -拟正规嵌入。

推论 12 设 G 是有限群。则下面结论等价:

(a) G 为超可解群。

(b) 存在 G 的正规子群 H 且使得 G/H 是超可解群, P 是 H 的任一 Sylow-子群, 对某个固定的 $M_d(P)$, 其内所有群在 G 中或 C -正规或 S -拟正规嵌入。

注记: 文 [13] 中的例子 3.5 表明定理 3.7 不能推广到包含超可解群类的饱和群系。

参考文献:

- [1] HUPPERT B. Endliche gruppen I [M]. Berlin/ Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1967.
- [2] SRINIVASAN S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. Israel J Math, 1980, 35: 210 - 214.
- [3] WEI H Q, WANG Y M. On C^* -normality and its properties [J]. J Group Theory, 2007, 10: 211 - 223.
- [4] BALLESTER-BOLINCHES A, PEDRAZA AQUILERA M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. J Pure App Algebra, 1998, 127: 223 - 118.
- [5] LI Y M, WEI H Q, WANG Y M. The influence of S -quasinormality of some subgroups of a finite group [J]. Arch Math (Basel), 2003, 81: 245 - 252.
- [6] ASAAD M, HELIEL A A. On S -quasinormally embedded subgroups of finite groups [J]. J Pure App Algebra, 2001, 165: 129 - 135.
- [7] WANG Y M. C -normality of groups and its properties [J]. J Algebra, 1996, 180: 954 - 965.
- [8] WEI H Q. On C -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups [J]. Comm Algebra, 2001, 29(5): 21 - 93.

(下转第 23 页)

- [8] 屠伯坝. 亚正定阵理论 (I) [J]. 数学学报, 1990, 33(4): 462 - 471.
TU B X. Theory of sub-positive definite matrix (I) [J]. Acta Mathematica Sinica, 1990, 33(4): 462 - 471.
- [9] 屠伯坝. 亚正定阵理论 (II) [J]. 数学学报, 1991, 34(1): 91 - 102.
TU B X. Theory of sub-positive definite matrix (II) [J]. Acta Mathematica Sinica, 1991, 34(1): 91 - 102.
- [10] 杨新民. 亚正定矩阵的行列式的一个不等式 [J]. 数学的实践与认识, 1994, 24(2): 45 - 47.
YANG X M. An inequality of determinant of sub-positive definite matrix [J]. Mathematics in Practice and Theory, 1994, 24(2): 45 - 47.
- [11] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001.
CHEN J L, CHEN X H. Special matrix [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.
- [12] 古以熹. 矩阵特征值的分布 [J]. 应用数学学报, 1994, 17(4): 501 - 511.
GU Y X. The distribution of eigenvalues of a matrix [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1994, 17(4): 501 - 511.
- [13] 葛人溥. 正元素对称矩阵正定性的简单判别法 [J]. 工程数学学报, 1984, 2(1): 151 - 154.
GE R P. The simple discrimination of positive definite of symmetric matrix of positive entries [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1984, 2(1): 151 - 154.
- [14] 李磊. 关于正元素对称矩阵正定性的判别法 [J]. 工程数学学报, 1988, 6(1): 108 - 110.
LI L. The discrimination of positive definite of symmetric matrix of positive entries [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 6(1): 108 - 110.

(上接第 15 页)

- [9] LI Y M, WEI H Q, WANG Y M. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups S-quasinormally embedded [J]. Acta Math Hungar, 2005, 108(4): 283 - 298.
- [10] KEGEL O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205 - 221.
- [11] DESKINS W E. On quasinormal subgroups of finite groups [J]. Math Z, 1963, 82: 125 - 132.
- [12] SCHMID P. Subgroups permutable with all sylow subgroups [J]. J Algebra, 1998, 207: 285 - 293.
- [13] LI S R, HE X L. On normally embedded subgroups of prime power order in finite groups [J]. Comm Algebra, 2008, 36(6): 2333 - 2340.
- [14] DOERK R, HAWKES T. Finite soluble groups [M]. Berlin-New York: Walter De Gruyter, 1992.
- [15] TATE J. Nilpotent quotient groups [J]. Topology, 1964, 3: 109 - 111.
- [16] ASAAD M. On the supersolvability of finite groups [J]. Annales Univ Sci Budapest, XIII, 1975, 18: 3 - 7.